Algebra delle Matrici

ft

Applicazioni

A

- Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- Trasformazioni lineari dello spazio in se stesso [affinità]
- ……

$a_{23} = 1$

Parte I

Definizioni

Definizione di una matrice

Una matrice A è definita da m righe e da n colonne come ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

In questo caso la matrice è composta da 3 righe e 4 colonne. Se il numero delle righe è uguale al numero delle colonne la matrice si dice quadrata.

L'elemento della matrice è definito come:

$$a_{ij}$$

i indice di riga

j indice di colonna

Vettore riga e vettore colonna

Una matrice di dimensione $1 \times n$ è chiamata vettore riga:

$$\underset{1\times5}{a} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Invece, una matrice di dimensione $m \times 1$ è chiamata vettore colonna:

$$\underset{5\times1}{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somma di matrici

Date due matrici A e B la loro somma, cioè A + B, è definita come $a_{ij} + b_{ij}$
Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 9 \\ 9 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix} = A + B = C = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 & 14 \\ 18 & 2 & 5 & 11 \\ 10 & 12 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

$$a_{23} = 1 \qquad b_{23} = 4 \qquad c_{23} = 5$$

Prodotto di una matrice per uno scalare

Se moltiplichiamo la matrice A di dimensione $m \times n$ per uno scalare λ, il risultato sarà una matrice λA sempre di dimensione $m \times n$, ottenuta moltiplicando lo scalare per ogni elemento della matrice.
Esempio:

$$\lambda = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 6 & 10 \\ 18 & 2 & 2 & 16 \\ 8 & 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

Per poter effettuare il prodotto righe per colonne tra due matrici è necessario che il numero delle colonne della prima matrice sia uguale al numero delle righe della seconda matrice

il prodotto righe per colonne è la matrice che si ottiene: mettendo nel "posto ij" il "prodotto scalare" tra i-esima riga della prima matrice per j-esima colonna della seconda matrice

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = A \times B = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -1 & -2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

Dove gli elementi della matrice C sono uguali ad:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \\ c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7 & c_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 14 \\ c_{21} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = -1 & c_{22} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 = -2 \\ c_{31} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 6 & c_{32} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 12 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

Da notare:

$$\underset{(m\times n)}{A}\cdot\underset{(n\times h)}{B}=\underset{(m\times h)}{C}$$

Da ciò implica che se moltiplico un vettore riga per un vettore colonna ottengo uno scalare. Invece, se moltiplico un vettore colonna per un vettore riga ottengo una matrice:

$$\underset{1\times n}{a}\cdot\underset{n\times 1}{b}=\underset{1\times 1}{c}$$

$$\underset{n\times 1}{b}\cdot\underset{1\times n}{a}=\underset{n\times n}{C}$$

Prodotto righe per colonne

esempio

$$\underset{1\times 2}{a} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \underset{2\times 1}{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a \times b = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 18$$

invece

$$\underset{2\times 1}{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underset{1\times 2}{a} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b \times a = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrice trasposta

Data una matrice $A = (a_{ij})$ si chiama matrice trasposta la matrice che ha per colonne le righe di A:

$$A^T = (a_{ji})$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 5 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice nulla

Una matrice è definita nulla se contiene tutti gli elementi uguali a 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice simmetrica

Una matrice è definita simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ quintdi per una matrice simmetrica vale che $A^T=A$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice triangolare [inferiore]

Una matrice è definita triangolare inferiore se $a_{ij} = 0$ per $i \leq j$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice triangolare [superiore]

Una matrice è definita triangolare inferiore se $a_{ij} = 0$ per $i \geq j$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale

Diagonale se gli unici elementi diversi da 0 sono a_{ii}

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice identità

La matrice identità è una matrice quadrata diagonale chiamata I dove a gli elementi della diagonale principale tutti uguale ad 1 mentre il restante uguali a zero.

Ad esempio:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice risulta molto importante perché:

$$A \times I = A \qquad I \times A = A$$

Riferimenti

- A. D'Ambra – L' Algebra delle Matrici
- M. Caponi – L. Forte - Matrici